SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
FAKULTET KEMIJSKOG INŽENJERSTVA I TEHNOLOGIJE
ZAVOD ZA MATEMATIKU

KOLEGIJ: Matematičke metode u kemijskom inženjerstvu

LAPLACEOVA TRANSFORMACIJA

Ivana Mihalec
4028

Zagreb, siječanj 2010.

Sadržaj

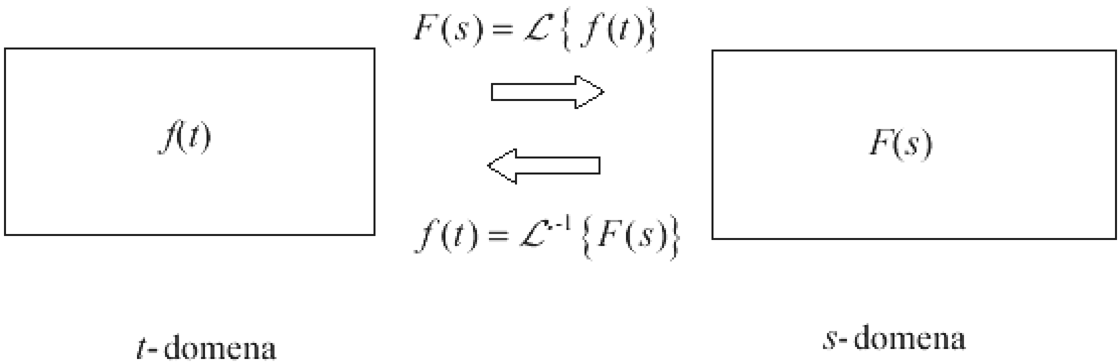
1. UVOD

U matematici ima više vrsta transformacija funkcija: Fourierova, Laplaceova, Poissonova, Mellinova itd. Zajedničko im je da se definiraju pomoću integrala pa se zovu i integralne transformacije, a nastale su iz dubokih matematičkih i praktičnih razloga.
Uz druge važne primjene, Laplaceova transformacija ima i primjenu u rješavanju linearnih diferencijalnih jednadžba.
Laplaceova transformacija je metoda rješavanja linearnih diferencijalnih jednadžbi.
Metoda se sastoji od tri koraka. U prvom koraku diferencijalna jednadžba se transformira u algebarsku jednadžbu. Tako dobivena jednadžba se riješi, a u trećem koraku se rješenje transformira u traženo rješenje originalne diferencijalne jednadžbe.
Pomoću Laplaceove transformacije računski postupci se svode na algebarske, mogu se prikladno svrstati, upotreba transformacijskih tablica skraćuje rad, granični i početni uvjeti se uključuju sami po sebi, dobivaju se istodobno rješenja za prijelazna i stacionarna stanja, a lako se rješavaju i slučajevi s diskontinuiranim ulazima.
Klasičan pristup rješavanja linearnih diferencijalnih jednadžbi s konstantnim koeficijentima uključuje tri koraka: određivanje općeg rješenja, određivanje posebnog rješenja, određivanje konstanta integracije iz početnih uvjeta. Što je red jednadžbe viši to takav postupak rješavanja postaje teži. Naprotiv uz pomoć Laplaceove transformacije preslikavaju se veličine koje su funkcije vremena t, u nove veličine koje su funkcije kompleksne varijable $s = \sigma + i\omega$ i na taj način se stvarnoj funkciji $f(t)$ pridružuje odgovarajuća funkcija $F(s)$ kao njena slika. Zadatak se iz realnog područja prenosi u matematički izvedeno Laplaceovo područje u kojem pojedine računske operacije iz realnog područja poprimaju jednostavan oblik, pa zadatak postaje prikladniji za istraživanje i lakše se dolazi do njegovog rješenja.
Laplaceova transformacija vrijedi samo za kontinuirane funkcije, točnije za po dijelovima neprekinute funkcije. Kod diskretnih zapisa imamo z- transformaciju. Njezina važnost se javlja pri analizi diskretnih sustava, koji su uz današnju primjenu računala vrlo česti.

PIERRE SIMON DE LAPLACE (1749-1827), veliki francuski matematičar i fizičar, jedan od utemeljitelja metričkog sustava, bavio se teorijom potencijala i matematičkom statistikom. Dokazao stabilnost sunčevog sustava.

2. LAPLACEOVA TRANSFORMACIJA I INVERZNA LAPLACEOVA TRANSFORMACIJA

Laplaceova transformacija je integralna transformacija koja je tijesno povezana s Fourierovom i ima analogna svojstva. Pomoću Laplaceove transformacije veličine koje su funkcije vremena *t* preslikavaju se u nove veličine koje su funkcije kompleksne varijable, $s=\sigma + i\omega$ i na taj se način stvarnoj funkciji f(t) pridružuje odgovarajuća funkcija F(s) kao njena slika. Zadatak se iz realnog područja (*t-domena*) prenosi u matematički izvedeno Laplaceovo područje (*s-domena)* (slika 1.).



Slika 1. Laplaceova transformacija

Neka je f(t) dana funkcija koja je definirana za sve pozitivne vrijednosti od t . Množenjem funkcije f(t) sa e^{-st} i integriranjem s granicama od nula do beskonačnosti. Ako dobiveni integral postoji onda je to funkcija od s i pišemo F(s) :

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt$$

Ta funkcija F(s) zove se Laplaceova transformacija od originalne funkcije f(t) , te ju zapisujemo kao L(f) .

$$L(f)(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt$$

Opisana operacija naziva se Laplaceova transformacija.

Nadalje originalna funkcija f(t) zove se inverzna transformacija ili inverzija od F(s) te ju zapisujemo $L^{-1}(F)$:

$$f(t) = L^{-1}(F)$$

Primjer 1.

Nađimo područje konvergencije Laplaceove transformacije ako je:

a) f(t) =1 za t > 0, tada je:

$$L(f)=L(1)= \int_0^\infty e^{-st}\,dt = -\frac{1}{s}e^{-st}\Big|_0^\infty ;$$

dakle, kad je s > 0 ,

$$L(1) = -\frac{1}{s} .$$

b) f(t) = e^{at} za t > 0 i a je realni broj, tada je:

$$L(e^{at}) = \int_0^\infty e^{-st}e^{at}\,dt = \frac{1}{a-s}e^{-(s-a)t}\Big|_0^\infty ;$$

kada s – a > 0,

$$L(e^{at}) = \frac{1}{s-a} .$$

3. SVOJSTVA LAPLACEOVIH TRANSFORMACIJA

3.1. INVERZNA TRANSFORMACIJA. LINEARNOST.

Funkcija *f(t)* se može transformirati ako zadovoljava sljedeće uvjete:

a) definirana je i jednoznačna za t > 0

b) po dijelovima je kontinuirana (neprekinuta) unutar svakog konačnog intervala 0 < a < t < b

c) njen Laplaceov integral mora biti konvergentan

Sljedeći teoremi čine osnovu za široku primjenu Laplaceove transformacije.

Teorem 1. Linearno svojstvo

Laplaceova transformacija je linearna transformacija koja je za svaku funkciju f(t) i g(t) za koje postoji Laplaceova transformacija i konstante a i b imamo

$$\mathrm{L}\{af(t) + bg(t)\} = a\,L\,(f) + b\,L\,(g)$$

Dokaz.

Prema definiciji

$$L\{af(t)+bg(t)\}=\int_0^\infty e^{-st}\left[af(t)+bg(t)\right]dt$$

$$= a\int_0^\infty e^{-st} f(t)dt + b\int_0^\infty e^{-st} g(t)dt$$

$$= a\,L\,(f) + b\,L\,(g)$$

Neke elementarne funkcije f(t) i njihove Laplaceove transformacije *L*(f) dane su u tablici 1.

Tablica 1.

	f(t)	*L* (f)		f(t)	*L* (f)
1	1	1/s	6	e^{at}	$\frac{1}{s-a}$
2	t	$1/s^2$	7	$\cos\ \omega t$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
3	t^2	$2!/s^3$	8	$\sin\ \omega t$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
4	t^n (n=1,2…)	$n!/s^{n+1}$	9	cosh at	$\frac{s}{s^2-a^2}$
5	t^a (a je + broj)	$\frac{\Gamma(a+1)}{s^{a+1}}$	10	sinh at	$\frac{a}{s^2-a^2}$

Teorem 2. Teorem o pomaku (First shifting theorem)

Ako je *L* (f) = F(s) kada je s >α , tada je

$$L\ \{\ e^{a\,t} f(t)\ \} = F(s-a) \qquad\qquad (s > \alpha + a)$$

dakle, supstitucija s sa s - a u odgovarajućem transformatu i množenjem originalnom funkcijom s e^{at} .

Dokaz.

Prema definiciji,

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt$$

i tada,

$$\text{F(s-a)} = \int_0^\infty e^{-(s-a)t} f(t)dt = \int_0^\infty e^{-st}\left[e^{at} f(t)\right]dt = L\left\{e^{at} f(t)\right\}$$

Primjer 2.

Koristeći Teorem 2 na formulama 4, 7 i 8 u Tablici 1 dobivamo sljedeće rezultate:

Tablica 2.

f(t)	L (f)
$e^{at}t^n$	$\dfrac{n!}{(s-a)^{n+1}}$
$e^{at}\cos \omega t$	$\dfrac{s-a}{(s-a)^2+\omega^2}$
$e^{at}\sin \omega t$	$\dfrac{\omega}{(s-a)^2+\omega^2}$

Za funkciju f (t) kažemo da je po dijelovima kontinuirana (neprekinuta) na konačnom intervalu $a \le t \le b$ ako je definirana za takav interval.

<u>Teorem 3. Postojeći teorem</u>

Neka f (t) funkcija koja je po dijelovima kontinuirana za svaki konačni interval gdje je $t \ge 0$ i zadovoljava

$$|f(t)| \le M\, e^{at} \qquad \text{za sve } t \ge 0,$$

i za neke konstante a i M. Tada Laplaceova transformacija od f (t) postoji za sve $s > a$.

Dokaz.

Budući da je f(t) po dijelovima kontinuirana, e^{-st} f(t) je integrabilna za svaki konačni interval na t osi, i iz $|f(t)| \leq M e^{at}$ slijedi

$$\left|L(f)\right| = \left|\int_0^\infty e^{-st} f(t)dt\right| \leq \int_0^\infty e^{-st}\left|f(t)\right|dt \leq \int_0^\infty e^{-st} M e^{at} dt = \mathrm{M}\int_0^\infty e^{-(s-a)t}dt = \frac{M}{s-a} \qquad (\text{ s>a })$$

U slučaju kada dvije funkcije imaju jednaku Laplaceovu transformaciju, one su potpuno identične.

3.2. LAPLACEOVE TRANSFORMACIJE DERIVACIJE I INTEGRALA

Sad ćemo vidjeti da, grubo govoreći, diferenciranje i integriranje funkcije f(t) odgovara množenju i dijeljenju Laplaceove transformacije F(s)= *L*(f) sa s .Velika važnost ovog svojstva Laplaceove transformacije je očita, jer na taj način računske operacije mogu biti zamijenjene s jednostavnim algebarskim operacijama.

<u>Teorem 4. Diferenciranje f(t)</u>

Pretpostavimo da je f (t) kontinuirana za sve t ≥ 0 i zadovoljava $|f(t)| \leq Me^{at}$ za konstante a i M, i ima derivaciju f '(t) koja je po dijelovima kontinuirana za svaki konači interval unutar intervala t ≥ 0. Tada Laplaceova transformacija derivacije f '(t) postoji kad je s >a , i

$$L(f') = L\, s(f) - f(0) \qquad\qquad (s > \mathrm{a})$$

Dokaz.

Za slučaj kada je derivacija f '(t) kontinuirana za sve t ≥ 0 , parcijalnim integriranjem slijedi:

$$L(f') = \int_0^\infty e^{-st} f'(t)dt = \left[e^{-st} f(t)\right]_0^\infty + s\int_0^\infty e^{-st} f(t)dt$$

Uvrštavanjem *L (f ') = s L (f) - f (0)* u drugu derivaciju *f ''(t)* dobivamo:

$$L(f'') = s\,L(f') - f'(0)$$
$$= s[s\,L(f) - f(0)] - f'(0)$$
$$= s^2L(f) - sf(0) - f'(0)$$

Slično dobivamo i treću derivaciju:

$$L(f''') = s^3\,L(f) - s^2 f(0) - sf'(0) - f''(0)$$

i ostale.

Teorem 5. Derivacija za bilo koji n

Neka su funkcije f (t) i njezine derivacije f '(t) , f "(t) , ..., $f^{(n-1)}$ (t) kontinuirane funkcije za sve $t \geq 0$, i neka derivacija $f^{(n)}(t)$ koja je po dijelovima kontinuirana za svaki konačni podinterval unutar intervala $t \geq 0$. Tada Laplaceova transformacija od $f^{(n)}(t)$ postoji kada je s >a , i dana je formulom:

$$L(f^{(n)}) = s^n\,L(f) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \ldots - f^{(n-1)}(0)$$

Teorem 6. Integriranje f(t)

Ako je funkcija f(t) po dijelovima kontinuirana i zadovoljava nejednakost $|f(t)| \leq Me^{at}$ za $t \geq 0$, tada je:

$$L\left\{\int_0^{\infty} f(\tau)d\tau\right\} = \frac{1}{s} L\{f(t)\} \qquad (s>0,\ s>a)$$

Dokaz.

Pretpostavimo da je f(t) po dijelovima kontinuirana i zadovoljava $|f(t)| \leq Me^{at}$ za $t \geq 0$ za konstante a i M. Ako pretpostavimo da je a pozitivan tada je integral

$$g(t) = \int_0^t f(\tau)d\tau$$

kontinuiran te dobivamo slijedeću relaciju

$$|g(t)| \le \int_0^t |f(\tau)|\, d\tau \le M \int_0^t e^{a\tau} d\tau = \frac{M}{a}(e^{a\tau} - 1) \qquad (a > 0)$$

g'(t)=f(t), osim u točkama u kojima je f(t) diskontinuirana.

Dakle g'(t) je po dijelovima kontinuirana za svaki konačni interval te prema Teoremu 4 slijedi

$$L\{f(t)\} = L\{g'(t)\} = s\,L\{g(t)\} - g(0) \qquad (s>a)$$

Budući da je g(0)=0, i slijedi

$$L(g) = \frac{1}{s} L(f)$$

4. TRANSFORMACIJA OBIČNE DIFERENCIJALNE JEDNADŽBE

Sada ćemo vidjeti kako obične linearne diferencijalne jednadžbe s konstantnim koeficijentima mogu biti reducirane u algebarske jednadžbe.
Naprimjer, razmatramo jednadžbu

$$y''(t) + \omega^2 y(t)=r(t)$$

gdje su r(t) i ω zadani.

Primjenjujući Laplaceovu transformaciju i koristeći

$$\mathcal{L}(f'')=s^2 \mathcal{L}(f)-sf(0)-f'(0)$$

dobivamo

$$s^2Y(s)-sy(0)-y'(0)+\omega^2Y(s)=R(s)$$

gdje je Y(s) Laplaceova transformaacija od funkcije y(t) , i R(s) je Laplaceova transformacija od r(t). Ovakva algebarska jednadžba naziva se **pomoćna jednadžba** od dane diferencijalne jednadžbe.
Njeno je rješenje

$$Y(s)=\frac{sy(0)+y'(0)}{s^2+\omega^2}+\frac{R(s)}{s^2+\omega^2}$$

5. PARCIJALNI RAZLOMCI

Za primjene je osobito važna inverzna transformacija razlomljene racionalne funkcije s obzirom na s. Takve funkcije rastavljamo na parcijalne razlomke i onda se prema teoremu o linearnosti možemo ograničiti na inverzne transformacije parcijalnih razlomaka. Rješenje je tada zbroj svih pojedinih razlomaka preslikanih u realno područje.

Općenito se transformacija F(s) može prikazati kao omjer dvaju polinoma G(s) i H(s), koji su redova m i n, i koji se mogu prikazati padajućim redom potencija varijable s:

$$F(s)=\frac{G(s)}{H(s)}=\frac{a_m s^m + a_{m-1}s^{m-1}+...+a_1 s + a_0}{s^n + b_{n-1}s^{n-1}+...+b_1 s+b_0}$$

a_m i b_n su realne konstante, a koeficijent najviše potencije od s u nazivniku može se izjednačiti s jedinicom. Uz to pretpstavljamo da je n > m i da je stoga F(s) pravi razlomak.

Jedan od načina da se nađu parcijalni razlomci funkcije F(s) je pomoću algebarske metode tzv. Heavisideovog razvoja. Kao konačni oblik dobijemo:

$$F(s)=\frac{G(s)}{H(s)}=\frac{\alpha_1}{s+\beta_1}+\frac{\alpha_2}{s+\beta_2}+\frac{\alpha_3}{s+\beta_3}+...+\frac{\alpha_i}{s+\beta_i}+...+\frac{\alpha_n}{s+\beta_n}$$

gdje je H(s) reda n, a b_i su suprotne vrijednosti korijena jednadžbe H(s) = 0.

Koeficijenti α_i se dobiju pomoću slijedećeg generaliziranog izraza:

$$\alpha_i=\lim_{s\to-\beta_i}\left((s+\beta_i)\frac{G(s)}{H(s)}\right)$$

no imamo li poseban slučaj da se korijen β jednadžbe H(s)=0 ponavlja:

$$F(s)=\frac{G(s)}{H(s)}=\frac{\alpha_m}{(s+\beta)^m}+\frac{\alpha_{m-1}}{(s+\beta)^{m-1}}+...+\frac{\alpha_1}{s+\beta}+\frac{\alpha_i}{(s+\beta_i)}$$

korijeni α_i dobiju se na slijedeći način:

$$\frac{(s+\beta)^m G(s)}{H(s)} = \alpha_m + \alpha_{m-1}(s+\beta) + ... + \alpha_1 (s+\beta)^{k-1}$$

$$\alpha_m = \lim_{s \to -\beta} \left(\frac{(s+\beta)^m G(s)}{H(s)} \right)$$

$$\alpha_k = \lim_{s \to -\beta} \left(\frac{1}{(m-k)!} \frac{d^{m-k}}{ds^{m-k}} \frac{(s+\beta)^m G(s)}{H(s)} \right) \qquad \text{(k=1,2,…,m-1)}$$

Koeficijente α_i možemo dobiti i metodom neodređenih koeficijenata.

Primjer 3. Pronađi inverznu transformaciju od:

$$\text{Y(s)} = \frac{G(s)}{H(s)} = \frac{s+1}{s^3 + s^2 - 6s}$$

Prikažimo Y(s) u obliku parcijalnih razlomaka:

$$\text{Y(s)} = \frac{s+1}{s(s-2)(s+3)} = \frac{A_1}{s} + \frac{A_2}{s-2} + \frac{A_3}{s+3}$$

Nađimo koeficijente:

$$A_1 = \frac{s(s+1)}{s(s-2)(s+3)}\Big|_{s=0} = -\frac{1}{6} \qquad A_2 = \frac{s+1}{s(s+3)}\Big|_{s=2} = \frac{3}{10} \qquad A_3 = \frac{s+1}{s(s-2)}\Big|_{s=-3} = -\frac{2}{15}$$

Imamo:

$$Y(s) = -\frac{1}{6s} + \frac{3}{10(s-2)} - \frac{2}{15(s+3)}$$

Iz prethodne jednadžbe i prije već izračunatih koeficijenata dobivamo inverznu transformaciju:

$$\text{L}^{-1}\text{(Y)} = -\frac{1}{6} + \frac{3}{10}e^{2t} - \frac{2}{15}e^{-3t}$$

6. PRIMJENA LAPLACEOVIH TRANSFORMACIJA

Primjer 4. Nađimo rješenje linearne diferencijalne jednadžbe:

$$y''(t) - 3y'(t) + 2y(t) = 4t + e^{3t}, \qquad y(0) = 1, \quad y'(0) = -1$$

Prevođenje te jednadžbe u Laplaceovo područje:

$$s^2Y(s) - s + 1 - 3(sY(s) - 1) + 2Y(s) = \frac{4}{s^2} + \frac{1}{s-3}$$

Riješimo to po Y(s) i prikažimo Y(s) u obliku parcijalnog razlomka:

$$Y(s) = \frac{G(s)}{H(s)} = \frac{s^4 - 7s^3 + 13s^2 + 4s - 12}{s^2(s-3)(s^2-3s+2)}$$

$$= \frac{A_2}{s^2} + \frac{A_1}{s} + \frac{B}{s-3} + \frac{C}{s-2} + \frac{D}{s-1}$$

Nađimo koeficijente:

$$A_2 = \frac{G(s)}{(s-3)(s^2-3s+2)}\Big|_{s=0} = \frac{12}{6} = 2$$

$$A_1 = \frac{d}{ds}\frac{G(s)}{H(s)}\Big|_{s=0} = \frac{d}{ds}\left[\frac{s^4 - 7s^3 + 13s^2 + 4s - 12}{(s-3)(s^2-3s+2)}\right]\Big|_{s=0} = 3$$

$$B = \frac{G(s)}{s^2(s^2-3s+2)}\Big|_{s=3} = \frac{1}{2}$$

$$C = \frac{G(S)}{s^2(s-3)(s-2)}\Big|_{s=2} = -2$$

$$D=\frac{G(s)}{s^2(s-3)(s-2)}\bigg|_{s=1}=-\frac{1}{2}$$

Imamo:

$$Y(s)=\frac{2}{s^2}-\frac{2}{s}+\frac{1}{2(s-3)}-\frac{2}{s-2}-\frac{1}{2(s-1)}$$

Nakon rješenja jednadžbe u Laplaceovom području vraćamo se u realno područje:

$$y(t)=L^{-1}\left[Y(s)\right]=L^{-1}\left[\frac{2}{s^2}-\frac{2}{s}+\frac{1}{2(s-3)}-\frac{2}{s-2}-\frac{1}{2(s-1)}\right]$$

$$y(t)=2t+3+\frac{1}{2}e^{3t}-2e^{2t}-\frac{1}{2}e^{t}$$

7. OSVRT NA Z-TRANSFORMACIJU

U diskretnim sustavim, umjesto funkcija, javljaju se nizovi. Danas, uz sve veću primjenu računala na važnosti dobivaju vremenski diskretni zapisi. Matematičke tehnike za analizu takvih diskretnih sustava su jednadžbe diferencija i z-transformacija.

Pretpostavimo da uzorkujemo kontinuiranu varijablu koja je funkcija vremena f(t). Budući da uzorkovane vrijednosti kontinuirane funkcije f(t) postoje samo u trenutku uzorkovanja, niz brojeva koji odgovaraju vrijednosti funkcije u vremenu uzorkovanja možemo zapisati kao:

$$f(mT_s) = \begin{cases} f(t) - za - m = 0,1,2,... \\ 0 ------ inace \end{cases}$$

gdje je T_s interval uzorkovanja.

Vremenski diskretni zapis kontinuirane funkcije f(t) označiti ćemo s f*(t). Budući da je vremenski diskretni zapis f*(t) podskup od kontinuirane funkcije f(t), možemo primijeniti Laplaceovu transformaciju na f*(t) :

$$F^*(s) = \int_0^\infty f^*(t) e^{-st}\, dt$$

Budući f*(t) postoji samo u trenutku uzorkovanja integral možemo zamijeniti sa sumom:

$$F^*(s) = \int_0^\infty f^*(t) e^{-st}\, dt = \sum_{m=o}^{\infty} f(mT_s) e^{-smT_s}$$

Uvodimo supstituciju $z=e^{sTs}$, te dobivamo:

$$F^*(s) = \sum_{m=0}^{\infty} f(mT_s) e^{-smT_s} = \sum_{m=0}^{\infty} f(mT_s) z^{-m} = F(z)$$

Dakle, z- transformacija kontinuirane funkcije f(t) uzorkovane s intervalom uzorkovanja T_s je definirana sljedećim izrazom:

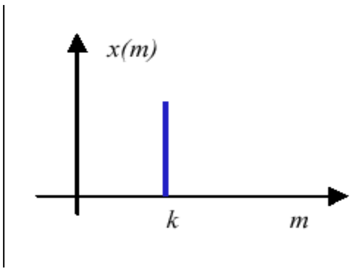
$$Z[f^*(t)] = F(z) = \sum_{m=0}^{\infty} f(mT_s) z^{-m}$$

Kako je z-transformacija zapravo samo Laplaceova transformacija vremenskog diskretnog zapisa, kao takva nasljeduje mnoga svojstva Laplaceove transformacije koja su navedena gore. Tablica z- transformacija se nalazi u prilogu (Prilog 2.).
Preslikavanje s-područja u z-područje ostvareno je sljedećim izrazom:

$$\mathbf{z=e^{sTs}}$$

koji preslikava cijelu lijevu stranu s- područja u ravninu omeđenu jediničnom kružnicom, tzv. z područje.
Kako je z- transformacija beskonačni red potencija, ona postoji samo za one vrijednosti varijable z za koje red konvergira konačnoj sumi. Područje konvergencije z transformacije je skup svih vrijednosti z za koje F(z) postiže konačne vrijednost.

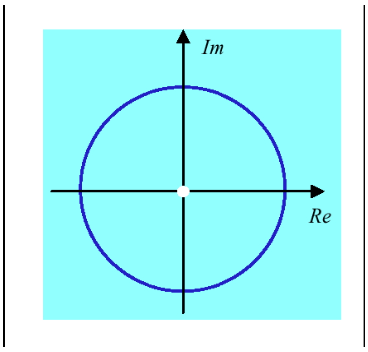
Primjer 5. Odredimo z- transformaciju i njezino područje konvergencije sljedećeg signala (F_s=1):



$$x(m) = \delta(m-k) = \begin{cases} 1 & m = k \\ 0 & m \neq k \end{cases}$$

$$X(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \delta(m-k) z^{-m} = 1 \cdot z^{-k} = \frac{1}{z^k}$$

X(z) postoji za sve vrijednosti z osim z=0. Područje konvergencije je cijelo z-područje osim z=0 (Slika 2.).



Slika 2. Područje konvergencije z-transformacije primjera 5.

Primjer 6. Odredimo z-transformaciju niza:

$$\{f(m)\}=\{1,3,2,0,4,0,0,0\}$$

$$F(z)=\sum_{m=0}^{\infty} f(m) z^{-m}$$

$$F(z)=1+3z^{-1}+2z^{-2}+4z^{-4}$$

8. LITERATURA

1. Ervin Kreyszig: Advanced Engineering Mathematics second edition, John Wiley & Sons, Inc. New York-London-Sydney 1967
2. I. N. Bronštejn i K.A. Semendjajev: Matematicki prirucnik za inženjere i studente,Tehnicka knjiga, Zagreb 1991.

9. PRILOZI

Prilog 1. :

Tablica 3. Z- transformacija

f(n)	F(z)
a^n	$\frac{z}{z-a}$
$\frac{a^n}{n!}$	$e^{a/z}$
$a^n \sin\beta n$	$\frac{az\sin\beta}{z^2-2az\cos\beta+a^2}$
$a^n \cos\beta n$	$\frac{z(z-a\cos\beta)}{z^2-2az\cos\beta+a^2}$
na^n	$\frac{az}{(z-a)^2}$
$\frac{(n+1)!}{2!(n-1)!}a^n$	$\frac{az^2}{(z-a)^3}$
$\frac{n!}{2!(n-2)!}a^n$	$\frac{a^2 z}{(z-a)^3}$
$\frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}a^n$	$\frac{az^k}{(z-a)^{k+1}}$
$\frac{n!}{k!(n-k)!}a^n$	$\frac{a^k z}{(z-a)^{k+1}}$
$n^2 a^n$	$\frac{az(z+a)}{(z-a)^3}$
$\sum_{k=0}^{n} f(k)$	$\frac{z}{z-1}F(z)$
f(n-k)	$\frac{F(z)}{z^k}$
f(n+k)	$z^k F(z)-\sum_{i=0}^{k-1} f(i) z^{k-i}$

Prilog 2. :

Tablica 4. Laplaceove transformacije

	f(t)	F(s)
1.	1	$\frac{1}{s}$
2.	c	$\frac{c}{s}$
3.	t	$\frac{1}{s^2}$
4.	t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
5.	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}$	$\frac{1}{\sqrt{s}}$
6.	e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$
7.	te^{-at}	$\frac{1}{(s+a)^2}$
8.	sinat	$\frac{a}{s^2+a^2}$
9.	cosat	$\frac{s}{s^2+a^2}$
10.	$\frac{t}{2a} \cdot \sin at$	$\frac{s}{(s^2+a^2)^2}$
11.	t·cosat	$\frac{s^2-a^2}{(s^2+a^2)^2}$
12.	$e^{-at}\cdot$sinbt	$\frac{b}{(s+a)^2+b^2}$
13.	$e^{-at}\cdot$cosbt	$\frac{s+a}{(s+a)^2+b^2}$
14.	$e^{-at}\cdot$f(t)	F(s+a)
15	f´(t)	sF(s)-f(0)
16.	f˝(t)	s^2F(s)-sf(0)- f´(0)